

## Моделирование экономических систем с помощью аппарата сетей Петри



**Павел Валерьевич  
СКОРОДУМОВ**

кандидат технических наук, заведующий лабораторией интеллектуальных и программно-информационных систем, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт социально-экономического развития территорий РАН (160014 г. Вологда, ул. Горького 56 а), доцент кафедры автоматiki и вычислительной техники Вологодского государственного университета (160035, г. Вологда, ул. Ленина, 15, e-mail: spv.vsc@gmail.com)

**Аннотация.** Моделирование является сегодня одним из важнейших инструментов исследования сложных систем. В поведении современных экономических систем одновременно присутствуют компоненты непрерывной и дискретной природы. В качестве аппарата исследования сложных экономических систем в статье предлагается использовать формализм вложенных гибридных сетей Петри.

Автором приведены основные подходы имитационного моделирования, понятия классических сетей Петри, модифицированного аппарата вложенных гибридных сетей Петри, преимущества их использования для моделирования систем. Представлено понятие универсальной системы имитационного моделирования.

На основе рассмотренных подходов выдвинуто предложение о разработке универсальной системы имитационного моделирования на базе модифицированного аппарата сетей Петри.

**Ключевые слова:** сложная система, модель, имитационное моделирование, сети Петри, универсальная система имитационного моделирования.

Современные экономические системы обладают одновременно структурной и поведенческой сложностью. Существующее понятие уровня сложности определяется количеством элементов того или иного вида, их связей и взаимосвязей, «отношений порядка» между ними [2]. Поведенческую сложность можно связать с поведением системы во времени и присутствием в экономических системах процессов управ-

ления. Под управлением системой понимают процесс, ориентирующий некоторую систему на достижение определенной цели [2]. В общем случае поведение системы во времени является непрерывным, в то время как управляющие процессы имеют дискретную природу. Сложные системы, объединяющие в себе компоненты непрерывного и дискретного характера, называют гибридными.

Одним из способов исследования окружающих нас систем служит моделирование. *Моделирование* – это процесс отражения реальной (или планируемой) деятельности организации при помощи специальной методологии [8]. Модель представляет реальный или абстрактный объект, который заменяет объект исследования в процессе его изучения, находясь в отношении сходства с последним. Наиболее естественная и важная сфера применения моделирования – анализ сложных систем, в том числе социотехнических (производственных, финансовых и т. д.) [11].

В настоящее время самым эффективным методом исследования экономических систем считается имитационное моделирование [4].

В нём сформировались три основных подхода: дискретно-событийное моделирование, системная динамика и агентное моделирование [11].

Аппарат системной динамики обычно оперирует непрерывными во времени процессами, а дискретно-событийное и агентное моделирование используются для дискретных во времени процессов. Системная динамика предполагает максимальный уровень абстракции модели, дискретно-событийное моделирование отражает абстракции низкого и среднего уровня. Агентное моделирование может применяться на любом уровне модели любого масштаба [11].

Дискретно-событийное моделирование обязано своим рождением Дж. Гордону. В начале 1960-х годов он спроектировал и реализовал на мэйнфреймах IBM систему GPSS. Основной объект в этой системе – пассивный транзакт (заявка на обслуживание), который может определенным образом представлять собой работников, детали, сырье, документы, сигналы и т.п.

Перемещаясь по модели, транзакты становятся в очереди к одноканальным и многоканальным устройствам, захватывают и освобождают их, расщепляются, уничтожаются и т.д. [11].

Как методология системная динамика была предложена в 1961 году Дж. Форрестером в качестве инструмента исследования информационных обратных связей в производственно-хозяйственной деятельности. Процессы, происходящие в реальном мире, в системной динамике представляются в терминах накопителей и потоков между ними. Системно-динамическая модель описывает поведение системы и ее структуру как множество взаимодействующих обратных положительных и отрицательных связей и задержек. Математически такая модель выглядит как система дифференциальных уравнений [11].

Агентное моделирование предполагает работу с децентрализованной моделью. В такой модели нет единой точки, определяющей поведение системы в целом. Агентная модель состоит из множества индивидуальных объектов (агентов) и их окружения. Поведение системы описывается на индивидуальном уровне; глобальное поведение рассматривается как результат совокупной деятельности агентов, каждый из которых согласно собственному «уставу» существует в общей среде, взаимодействует с ней и другими агентами [11].

Если абстрактному представлению системы поставить в соответствие определенные графические примитивы и связать их линиями, несущими определенную логику, то получится некая сеть – графический образ процесса. Сетевые методы описания и анализа процессов хороши тем, что используемые в них абстракции близки к интуитивным представлениям о процессах [5].

Одним из популярных графических средств исследования систем являются сети Петри (СП). Они позволяют описывать и анализировать длительность выполнения и взаимодействие операций внутри процессов разного уровня с целью выявления узких мест производственно-экономических систем, а также определять величины и резервы сокращения затрат человеческих, финансовых и других ресурсов на выполнение этих процессов. Основные преимущества использования СП в моделировании заключаются в следующем: 1) процесс, определенный в терминах СП, имеет ясное и четкое представление; 2) наглядность графики построения сети, благодаря которой все ее определения и алгоритмы легко воспринимаются; 3) возможность использования различных методов анализа [7].

В то же время популярность СП вызвана удачным представлением различных типов объектов, присутствующих во многих моделируемых системах, и «событийным» подходом к моделированию. СП обладают наилучшими возможностями для описания взаимосвязей и взаимодействий параллельно работающих процессов [5].

СП являются мощным инструментом исследования систем благодаря возможности описания многих классов дискретных, асинхронных, параллельных, распределенных, недетерминированных систем, наглядности представления их работы, развитию математическому и программному аппарату анализа. СП разрабатывались специально для моделирования тех систем, которые содержат параллельно взаимодействующие компоненты, например аппаратное и программное обеспечение ЭВМ, гибкие производственные системы, а также социальные и биологические системы [5].

В общем виде СП [3] представляет собой двудольный ориентированный граф:

$$N = (P_N, T_N, F_N), \quad (1)$$

где  $P_N$  – конечное множество позиций;  
 $T_N$  – конечное множество переходов, такое, что  $P_N \cap T_N = \emptyset$ ;  
 $F_N$  – функция инцидентности, задающая кратность дуг,

$$F_N : (P_N \times T_N) \cup (T_N \times P_N) \rightarrow \text{Nat}$$

(Nat – множество натуральных чисел, дополненное нулем).

В СП позиции соответствуют условиям, а переходы – событиям. Динамика поведения моделируемой системы отражается в функционировании сети в виде совокупности действий, называемых срабатыванием переходов. Действующие в СП соглашения о правилах выполнения переходов выражают логические взаимосвязи между условиями и событиями в моделируемой системе.

Изменение состояния сети связано с механизмом изменения маркировок позиций. Начальное состояние СП задается с помощью начальной маркировки ее позиций. Маркировка сети заключается в присвоении позициям числовых значений (меток, маркеров, фишек). Метки представляют собой набор атрибутов (числа, переменные). Выполнение условия изображается разметкой (маркировкой) соответствующего места, а именно помещением числа  $n$  фишек (маркеров) в эту позицию. Переход может сработать, если выполнены все условия реализации соответствующего события. Для этого задаются специальные правила или процедуры перехода [3, 6].

Обыкновенные сети Петри, несмотря на широту своего использования, не позволяют проводить исследования сложных систем, включающих в себя одновременно дискретные и непрерывные компоненты. В работе [9] был предложен аппарат вложенных гибридных сетей Петри (ВГСП), объединяющий формализмы гибридных и вложенных сетей Петри.

ВГСП можно определить следующим набором [10]:

$$\text{NHPN} = \{\text{Atom}, \text{Lab}, \text{SN}(\text{HPN}), (EN_1, \dots, EN_k), \Lambda\}. \quad (2)$$

$\text{Atom} = \text{Var} \cup \text{Con}$  – множество атомов, состоящее из множеств имен переменных и имен констант;  $\text{Lab} = \text{Lab}_v \cup \text{Lab}_h$  – множество меток, служащих для вертикальной и горизонтальной синхронизации переходов;

$(EN_1, \dots, EN_k)$  ( $k \geq 1$ ) – конечный набор обыкновенных СП;  $\Lambda$  – функция пометки переходов элементами из множества  $\text{Lab}$ .

$\text{SN}(\text{HPN})$  – системная сеть в составе ВГСП, представляющая собой гибридную сеть Петри (ГСП):

$$\text{HPN} = (\text{P}, \text{T}, \text{Pre}, \text{Post}, \text{D}, \text{C},). \quad (3)$$

$\text{P} = \text{P}_d \cup \text{P}_c$  – множество дискретных и непрерывных позиций;

$\text{T} = \text{T}_d \cup \text{T}_c \cup \text{T}_k \cup \text{T}_e$  – множество дискретных, непрерывных, переходов квантования и экстраполяции;

$\text{Pre}, \text{Post}$  – матрицы инцидентности, характеризующие множество дуг;

$\text{D}: \text{T}_d \rightarrow \mathbb{R}^+$  – функция, определяющая интервалы задержки для дискретных временных переходов;

$\text{C}: \text{T}_c \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_\infty^+$  – функция, определяющая пропускную способность непрерывных переходов.

Интересным вопросом, возникающим при исследовании систем с помощью СП, является введение в систему понятия времени. В аппарате ВГСП возможно использование понятий глобального и локального времен.

Первое представляет собой внешнее для системы время, с которым последняя связана понятием шага моделирования, позволяющим оценивать временное изменение состояния системы относительно внешних систем.

Второе используется для определения задержек срабатывания дискретных пере-

ходов и пропускной способности непрерывных переходов ВГСП. Все дискретные переходы делятся на мгновенно срабатывающие, детерминированные временные и экспоненциально детерминированные. Деление связано с определением интервала задержки для переходов. Для непрерывных переходов вводится понятие пропускной способности, которое отражает скорость перемещения через переход непрерывного потока фишек.

Маркировка сети назначает для каждой дискретной позиции целое число фишек с учетом их потенциала, а для каждой непрерывной позиции – присутствует в ней сигнал или нет.

В аппарат ВГСП введены характерные для СП высокого уровня понятие веса дуги и ингибиторные дуги.

Существенным добавлением в аппарат является возможность использования дробных и отрицательных значений для веса исходящей из перехода дуги. При использовании отрицательного веса дуги следует говорить о потенциале фишек, находящихся в этой позиции. Независимо от трактовки маркировки сети уравнение динамики сети не меняется.

Динамика поведения ВГСП описывается следующими четырьмя типами шагов срабатывания:

1. Системно-автономный шаг – это срабатывание перехода системной сети в соответствии с правилами для ГСП, при этом элементные сети рассматриваются как фишки, не имеющие собственной структуры.

2. Элементарно-автономный шаг меняет только внутреннее состояние (маркировку) элементной сети, не меняя ее местонахождение в системной сети.

3. Шаг горизонтальной синхронизации используется для синхронизации переходов в двух элементных сетях, находящихся в одной позиции системной сети.

4. Шаг вертикальной синхронизации используется для синхронизации перехода в системной сети с некоторыми переходами элементных сетей.

Для описания динамики поведения ВГСП используется следующее уравнение:

$$M_k = M_{k-1} + C(p, t)U_k. \quad (4)$$

$M$  – матрица маркировки сети;

$U_k$  – управляющий вектор определяет множество переходов готовых к срабатыванию в текущий момент времени;

$C(p, t)$  – результирующая матрица инцидентности ВГСП. Элемент матрицы инцидентности, расположенный на пересечении строки, обозначенной позицией  $p_i$ , и столбца, обозначенного переходом  $t_j$ , принимает значение NumM, NumM или 0, когда переход  $t_j$  имеет входящую дугу из позиции  $p_j$ , исходящую дугу в позицию  $p_i$  или не имеет соединения с позицией  $p_i$  (где NumM – количество удаляемых, добавляемых меток). Величина NumM определяется исходя из типов позиции и перехода, а также веса дуги, их соединяющей.

Модифицированный аппарат вложенных гибридных сетей Петри расширяет область применения классических СП и уже существующих расширений, позволяя исследовать гибридные системы со сложной структурой как единое целое.

Представление отдельных частей системы в виде ВСП дает возможность упростить восприятие большой и громоздкой СП, сделать модель системы более наглядной и понятной, позволяет моделировать многокомпонентные структуры различной сложности, в том числе и системы с элементами обслуживания.

Введение новых переходов квантования и экстраполяции, понятия веса дуги, разрешающих и запрещающих дуг, модифицированных правил работы с ними делает предлагаемый формализм более мощным и выразительным средством описания не только гибридных систем, но и различных математических функций и алгоритмов.

Присутствие в экономико-математических моделях материального, финансового и социального факторов требует применения разнообразных инструментов на соответствующем модельном уровне. Так, производственно-технологические модели (традиционно рассматриваемые как системы массового обслуживания) неплохо моделируются дискретно-событийными средствами типа GPSS; финансовые модели хорошо вписываются в рамки системной динамики; для имитационного моделирования трудовых ресурсов может быть полезен агентный подход [11].

Имитационное моделирование систем, в которых находят комплексное применение все нотации и высокие компьютерные технологии, сегодня является наиболее перспективной и быстро развивающейся сферой применения имитационного моделирования для бизнеса и корпораций [4].

Концепция универсальной системы моделирования позволяет сэкономить время разработки и реализации имитационной модели, сделать процесс самого моделирования более простым и доступным. При этом сокращается вероятность возникновения ошибок в ходе создания моделей из-за недостаточного знания языковых средств, невнимательности в работе с большими объемами информации и т.д. [1].

Концепция универсальной системы имитационного моделирования основывается на принципах простоты, модульности, универсальности [1].

Первый предполагает минимум знаний пользователя о системе моделирования и, как следствие, в минимум трудозатрат.

Второй принцип предусматривает наличие общих для различных классов систем моделей – готовых модулей.

Третий отражает способность охватить сложные многоуровневые объекты произвольной структуры, элементы которых являются динамическими системами в широком понимании.

Существующие системы моделирования можно условно разделить на две группы: системы, использующие классические языки моделирования (GPSS, iThink Analyst, Arena), и специализированные системы, ориентированные на решение задач имитационного моделирования какой-то конкретной узкой предметной области. Достоинства одной группы систем моделирования являются одновременно недостатками другой. Создание системы, охватывающей наибольший спектр реальных объектов, и прежде всего систем, продуктом которых является управление, вызывает сегодня значительный интерес [1].

Опираясь на всё вышесказанное, можно сделать вывод о целесообразности постро-

ения универсальной системы имитационного моделирования на базе модифицированного аппарата ВГСП. Выделим преимущества, которыми будет обладать новая система:

1. Реализация ее на принципах имитационного моделирования.
2. Объединение всех положительных черт СП.
3. Возможность построения моделей на базе различных расширений СП.
4. Объединение в ней всех нотаций имитационного моделирования.
5. Реализация ее на принципах концепции универсальной системы имитационного моделирования.
6. Возможность применения в исследованиях самых разнообразных объектов.

### Литература

1. Духанов, А.В. Имитационное моделирование сложных систем: курс лекций / А.В. Духанов, О.Н. Медведева. – Владимир : ВГУ, 2010. – 118 с.
2. Кобелев, Н.Б. Основы имитационного моделирования сложных экономических систем / Н.Б. Кобелев. – М. : Дело, 2003. – 336 с.
3. Котов, В.Е. Сети Петри / В.Е. Котов. – М. : Наука, 1984. – 160 с.
4. Лычкина, Н.Н. Динамическое имитационное моделирование развития социально-экономических систем и его применение в информационно-аналитических решениях для стратегического управления [Электронный ресурс] / Н.Н. Лычкина. – Режим доступа : <http://strategybusiness.ru/dinamika-soczialno-ekonomicheskix-sistem/dinamicheskoe-imitaczionnoe-modelirovanie-razvitiya-soczialno-ekonomicheskix-sistem-i-ego-primenenie-v-informaczionno-analiticheskix-resheniyax-dlya-strategicheskogo-upravleniya.html>.
5. Мальков, М.В. Сети Петри и моделирование [Электронный ресурс] / М.В. Мальков, С.Н. Малыгина. – Режим доступа : <http://cyberleninka.ru/article/n/seti-petri-i-modelirovanie>.
6. Питерсон, Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем / Дж. Питерсон. – М.: Мир, 1984. – 264 с.
7. Полещук, Н.А. Моделирование затрат в экономических системах с помощью сетей Петри [Электронный ресурс] / Н.А. Полещук. – Режим доступа : [http://www.marketing-mba.ru/article/v4\\_11/Paliashchuk.pdf](http://www.marketing-mba.ru/article/v4_11/Paliashchuk.pdf).
8. Репин, В.В. Процессный подход к управлению. Моделирование бизнес-процессов / В.В. Репин, В.Г. Елиферов. – М.: Манн, Иванов и Фербер, 2013. – 544 с.
9. Скородумов, П.В. Моделирование сложных динамических систем на базе вложенных гибридных сетей Петри / П.В. Скородумов // Системы управления и информационные технологии: научно-технический журнал. – Москва; Воронеж : Научная книга, 2008. – С. 182-187.
10. Скородумов, П.В. Моделирование технологических процессов в терминах сетей Петри / П.В. Скородумов // Научные аспекты инновационных исследований: материалы I Междунар. науч.-практ. конф. – Самара: ООО «Инсома-пресс», 2013. – С. 30-34.
11. Чернышова, Н.Н. Имитационное моделирование бизнес-процессов: учеб.-метод. пособие / Н.Н. Чернышова. – Нижний Новгород: НГУ им. Лобачевского, 2010. – 28 с.

Skorodumov P.V.

## Modeling of economic systems with Petri nets

Pavel Valeryevich Skorodumov – Ph.D. in Engineering, Head of the Laboratory for Intelligent and Software-Information Systems at the Federal State-Financed Scientific Institution the Institute of Socio-Economic Development of Territories of the Russian Academy of Sciences (56A, Gorky Street, Vologda, 160014, Russia.); Associate Professor at the Department of Automatics and Computer Engineering at the Vologda State University (15, Lenin Street, Vologda, 160035, Russia), spv.vsc@gmail.com.

**Abstract.** Modeling is one of the most important tools to study complex systems. Components of both continuous and discrete nature are present in the behavior of contemporary economic systems. The article uses formalism of nested hybrid Petri nets as a tool to study complex economic systems.

The author describes basic approaches of simulation modelling, concepts of classical Petri nets, modified means of nested hybrid Petri nets, benefits of their use for systems modeling. The article presents the concept of a universal system of simulation modeling.

On the basis of considered approaches the article proposes to develop a universal system of simulation modeling on the basis of the modified machine Petri nets.

**Key words:** Complex system, model, simulation modeling, Petri nets, universal system of simulation modeling.

### References

1. Dukhanov A. V., Medvedeva O. N. *Imitatsionnoe modelirovanie slozhnykh sistem: kurs lektii* [Simulation Modeling of Complex Systems: a Course of Lectures]. Vladimir: VGU, 2010. 118 p.
2. Kobelev N. B. *Osnovy imitatsionnogo modelirovaniya slozhnykh ekonomicheskikh sistem* [Bases for Simulation Modeling of Complex Economic Systems]. Moscow: Delo, 2003. 336 p.
3. Kotov V. E. *Seti Petri* [Petri Nets]. Moscow: Nauka, 1984. 160 p.
4. Lychkina N. N. *Dinamicheskoe imitatsionnoe modelirovanie razvitiya sotsial'no-ekonomicheskikh sistem i ego primenenie v informatsionno-analiticheskikh resheniyakh dlya strategicheskogo upravleniya* [Dynamic Simulation Modeling of Socio-Economic Systems and its Application in Information-Analytical Solutions for Strategic Management]. Available at: <http://strategybusiness.ru/dinamika-sotsialno-ekonomicheskix-sistem/dinamicheskoe-imitatsionnoe-modelirovanie-razvitiya-sotsialno-ekonomicheskix-sistem-i-ego-primenenie-v-informatsionno-analiticheskix-resheniyax-dlya-strategicheskogo-upravleniya.html>.
5. Mal'kov M. V., Malygina S. N. *Seti Petri i modelirovanie* [Petri Nets and Modeling]. Available at: <http://cyberleninka.ru/article/n/seti-petri-i-modelirovanie>.
6. Peterson J. *Teoriya setei Petri i modelirovanie sistem* [Petri Net Theory and the Modelling of Systems]. Moscow: Mir, 1984. 264 p.
7. Poleshchuk N. A. *Modelirovanie zatrat v ekonomicheskikh sistemakh s pomoshch'yu setei Petri* [Cost Modelling in Economic Systems Using Petri Nets]. Available at: [http://www.marketing-mba.ru/article/v4\\_11/Paliashchuk.pdf](http://www.marketing-mba.ru/article/v4_11/Paliashchuk.pdf).
8. Repin V. V., Eliferov V. G. *Protsessnyi podkhod k upravleniyu. Modelirovanie biznes-protsessov* [Process Approach to Management. Modeling of Business Processes]. Moscow: Mann, Ivanov i Ferber, 2013. 544 p.
9. Skorodumov P. V. Modelirovanie slozhnykh dinamicheskikh sistem na baze vlozhennykh gibridnykh setei Petri [Modeling of Complex Dynamic Systems on the Basis of Nested Hybrid Petri Nets]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii: nauchno-tekhnicheskii zhurnal* [Management Systems and Information Technologies: Research and Technology Journal]. Moscow; Voronezh: Nauchnaya kniga, 2008, pp. 182-187.
10. Skorodumov P. V. Modelirovanie tekhnologicheskikh protsessov v terminakh setei Petri [Modeling of Technological Processes in Terms of Petri Nets]. *Nauchnye aspekty innovatsionnykh issledovaniy: materialy I Mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* [Scientific Aspects of Innovation Research: Materials of the First International Research-to-Practice Conference]. Samara: OOO "Insoma-press", 2013, pp. 30-34.
11. Chernyshova N.N. *Imitatsionnoe modelirovanie biznes-protsessov: ucheb.-metod. posobie* [Simulation Modeling of Business Processes: Study Guide]. Nizhnii Novgorod: NGU im. Lobachevskogo, 2010. 28 p.